

高次元適応的世代重複モデルにおける カオスの発生とその頻度

横 尾 昌 紀

概 要

本稿では、CES型の効用関数と生産関数をもつ世代重複モデルにおいて、完全予見の仮説に代わり、来期の価格を過去と現在の観察値の加重平均として予測する適応的な期待形成仮説を導入したときに生じるダイナミクスを分析する。主要な結果として、適応的モデルにおいては完全予見仮説のもとでは生じ得ない複雑性（馬蹄、ストレンジ・アトラクタ、無限個の周期アトラクタ）が発生することが計算機の援用により示される。さらに、観測可能な複雑性が期待形成過程の変更や経済構造パラメータの変化に対して高い頻度で発生することが示される。

1 はじめに

時間を通じての経済現象をモデル化する際に、経済主体は、利潤最大化や効用最大化にもとづく最適化行動を行うという意味で合理的に振る舞うと仮定されると同時に、将来の予測について体系的に誤らないという意味で合理的に期待を形成すると仮定されている場合が多かった。後者の仮定は決定論的な枠組みにおいて、完全予見（perfect foresight）の仮定に相当する。この仮定は、経済主体の予測行動の定式化を回避するという意味で動学モデルの構築を飛躍的に容易にする反面、経済主体に驚異的な計算力や市場に関する知識を要求しているという点で現実性に欠けるとして多くの批判を受けてきた。また、このような仮定が課されたモデルから生じる経済時系列を我々が観測する現象の予測や評価あるいは記述をする際の基準にしようとしても、強い非線形性が存在する場合、与えられた初

期条件に対し均衡経路が一意的に決まらなくなることが多い。この場合、理論的観点からはともかく、実証的観点からみれば、そのモデルの利用価値は高いとはいえない。

これらの理由から、本稿では、生産資本を含む単純な世代重複モデルを題材に、よく用いられる完全予見の仮定に代わり、経済主体の予測行動に関する合理性を制限して、観察された過去の時系列から将来の価格を予測し、その予測された価格にもとづいて効用最大化を行うような適応的（adaptive）な経済主体の行動原理を導入したときの可能な経済変動の型を調べる。以下で、陽表的なモデルをもとに、完全予見が仮定されている場合には単調増加的な、あるいは単調減少的な変動の型しか生み出さないような効用関数と生産関数に関する設定のもとで、ある単純な適応的な期待形成を導入したときに、馬蹄（位相的カオス）、ストレンジ・アトラクタ（観測可能なカオス）、および、無限個の高周期ア

トラクタ (Newhouse現象) といった複雑性が発生することを計算機を援用して示す。今回、期待形成過程の選択に関する行動原理や期待形成過程の更新メカニズム¹¹⁾を直接モデルに組み入れていない。しかし、最も近視眼的な期待形成のもとで複雑性を経験しているときに、ある期待形成過程のクラスの中で、現時点の期待形成を過去を考慮するより洗練された期待形成に更新したとしても、複雑性が消滅しない可能性が大きいことが示される。

2 モデルの設定

ここでは個人の生存期間が2期間に分けられる、生産資本を含む世代重複モデル (Diamond型) を扱う。完全予見仮説のもとでのこの型のモデルの諸性質はよく調べられている。Diamond (1965), Azariadis (1988),あるいは、Galor and Ryder (1989) を参照せよ。以下の分析で特徴的なのは、通常おかれている完全予見の仮説を放棄している点である。単純化のために、人口は時間を通じて一定で、生産過程に投入された資本は1期で完全に減耗する (減価償却率=1) とする。

各時点 $t \in N$ において、生産は資本労働比率 k_t に関して表された代替の弾力性一定の生産関数 $f: R_+ \rightarrow R_+$ を通じて行われるとする。

$$\begin{aligned} f(k_t) &= A[1 - \alpha + \alpha k_t^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= A k_t[(1 - \alpha)k_t^{\beta} + \alpha]^{-1/\beta} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $A > 1$, $\beta \in (1, \infty)$ および、 $\alpha \in (0, 1)$ である。代替の弾力性は $(1 + \beta)^{-1} \in (0, 1/2)$ で表され、 $\alpha \in (0, 1)$ は $\beta \rightarrow 0$ のときの資本分配率を表す。しばしば、 f がパラメータに依存することを明示するために、 f_{β} などとかく。減価償却率が1であることに注意すれば、利潤最大化の一階の条件から、

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t) \\ &= \alpha A^{-\beta} [f(k_t)/k_t]^{\beta+1} =: R(k_t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \\ &= (1 - \alpha) A^{-\beta} [f(k_t)]^{\beta+1} =: W(k_t) \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。ただし、 r_t は粗実質利子率で、 w_t は実質賃金率である。ここで、 $R(0) = A\alpha - 1/\beta$, $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$, $R'(0) = 0$, $R'(x) < 0$ ($x \in R_{++}$), $R(1) = \alpha A$, $W(0) = W'(0) = 0$, $W'(x) > 0$ ($x \in R_{++}$), $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) < \infty$, $W(1) = (1 - \alpha)A$, $W'(1) = -R'(1) = \alpha(1 - \alpha)(1 + \beta)A$ となることに気を付ける。

各個人の生存期間は2期間に分けられる。 t 期に生まれた個人は、人生の第1期に、市場に労働を非弾力的に供給し、競争的賃金 w_t を得、第2期には労働をしないで前期に行った貯蓄分を消費し尽くす。各個人は次のような代替の弾力性一定の異時点間の効用関数 $u: R^2 \rightarrow R$ で特徴づけられる。

$$u(c_t^1, c_{t+1}^2) = [(1 - a)[c_t^1]^{-b} + a[c_{t+1}^2]^{-b}]^{-1/b} \quad (4)$$

ただし、 $a \in (0, 1)$ 。また、 c_t^j は j 期 ($j \in N$) に生まれた個人の人生の第 i 期 ($i = 1, 2$) における消費水準を表す。代替弾力性は $\eta = (1 + b)^{-1}$ である。 t 期に人生の第1期にいる個人

(1) カオスと適応的な期待形成過程に関する興味深い議論として、Brock and Hommes (1997) と Hommes and Sorger (1997) をみよ。

は、与えられた賃金率 w_t と予測された次期の粗実質利子率 r_{t+1}^e のもとで、貯蓄水準 $S(r_{t+1}^e, w_t)$ を次のように決定する。

$$\begin{aligned} S(r_{t+1}^e, w_t) &:= \\ \max\{z \in [0, w_t] : u(w_t - z, r_{t+1}^e z)\} \\ &= \frac{w_t}{1 + \mu[r_{t+1}^e]^{1-\eta}} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\mu = \left[\frac{1-a}{a} \right]^\eta$$

である。よって、 s は r_{t+1}^e は w_t の関数であり、パラメータ $a \in (0, 1)$ は $\eta = 1$ (Cobb-Douglas 型効用関数) のときの賃金所得に対する貯蓄係数を表す。効用関数の形状から、各財が正常財であることが保証され、さらに、 $\eta > 1$ すなわち $b \in (-1, 0)$ と仮定すると、粗代替性が保証される。言い換えると、

$$\frac{\partial S(r_{t+1}^e, w_t)}{\partial w_t} \in (0, 1), \quad \frac{\partial S(r_{t+1}^e, w_t)}{\partial r_{t+1}^e} > 0 \quad (6)$$

非負の整数 m に対し、標準 m 単体 Δ_m を

$$\Delta_m := \{\lambda \in \mathbf{R}^{m+1} : \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}, \quad (7)$$

で定義し、その閉包を $\overline{\Delta_m}$ で表す。 t 期における個人は、次期の期待粗実質利子率 r_{t+1}^e が、 m 期前までの観測された粗実質利子率 $(r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-m})$ のある加重平均として表されると想定していると仮定する。ここで、 m は個人の記憶の度合いと解釈できよう。個人の期待形成過程は以下の式で表される。

$$r_{t+1}^e = \phi_\lambda(r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-m})$$

$$= \sum_{i=0}^m \lambda_i r_{t-i},$$

$$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \Delta_m \quad (8)$$

ここで、任意の m と $\lambda \in \overline{\Delta_m}$ 、および、 $\bar{r} \in R$ に対し、

$$\phi_\lambda(\bar{r}, \dots, \bar{r}) = \bar{r} \quad (9)$$

が成り立つことに注意する。これは、同じ利子率が (記憶にある) 過去から現在まで続いて生じれば、将来もその値が実現すると予測することを意味する。

市場均衡条件と、(2)、(3)、(5)、(8) より、経済は次の $m+1$ 階の差分方程式で記述される。

$$k_{t+1} = S(\phi_\lambda(R(k_t), \dots, R(k_{t-m})), W(k_t)) \quad (10)$$

ここで、 $k_{t-m} = x_t^0, k_{t-m+1} = x_t^1, \dots, k_t = x_t^m$ と変換し、

$$x_t = (x_t^0, x_t^1, \dots, x_t^{m-1}, x_t^m) \in \mathbf{R}_+^{m+1}$$

とおいたとき、(10) は、

$$x_{t+1} = F_\lambda(x_t), \quad (11)$$

ただし、

$$F_\lambda : \mathbf{R}_+^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}_+^{m+1},$$

$$F_\lambda(x) = (x^1, x^2, \dots, x^{m-1}, x^m, S(\cdot, \cdot)),$$

$$S(\cdot, \cdot) = S(\phi_\lambda(R(x^m), \dots, R(x^0)), W(x^m))$$

と同値である。 $m \neq 0$ に対し、 F_λ は \mathbf{R}_+^{m+1} からその像の上への微分同相写像となることに注意しておく。

3 静学的期待形成の場合

3.1 完全予見の場合との比較

完全予見を仮定した場合と静学的期待形成を仮定した場合における起こりえるダイナミクスの違いについて簡単に触れておく。

期待形成過程が(8)において、 $r_{t+1} = r_t$ となる場合、つまり、 $\lambda \in \Delta_0$ あるいは $\lambda = \lambda_m^* = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \overline{\Delta_m}$ 、($m > 0$)である場合、その期待形成を静学的 (static or naive) と呼ぶことにする。これに対し、 $r_{t+1} = r_{t+1}$ という期待形成は完全予見と通常呼ばれる。明らかに、(9)に注意すれば、任意の m と $\lambda \in \overline{\Delta_m}$ に対し、差分方程式 (10) の定常均衡点 (不動点) と、完全予見を仮定した場合の (10) に相応する差分方程式

$$k_{t+1} = S(R(k_{t+1}), W(k_t)) \quad (12)$$

のそれは一致する。しかし、静学的期待と完全予見の場合を比べてみても、不動点の安定性や不動点以外の変集合に関する性質は (存在問題も含め) 一般に異なる。完全予見モデル(12)が、(6)の条件を満たしているとき、周期点は不動点に限る (つまり、各初期条件に対し単調増加ないし単調減少する時系列しか生み出さない) ことは容易に確かめられる。ところが、静学的期待の場合必ずしもそうはならない。実際、静学的期待のモデルは

$$k_{t+1} = S(R(k_t), W(k_t)) =: g(k_t), \quad (13)$$

であるから ($g: R_+ \rightarrow R_+$),

$$g'(x) = f'(x) \left[-\frac{\partial S(\cdot, \cdot)}{\partial R} - x \frac{\partial S(\cdot, \cdot)}{\partial W} \right] \quad (14)$$

を得、(6)が満たされている場合、 g' の符号は

確定しない。ただし、 $x \in R_{++}$ に対し、

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \sigma(x) \leq x,$$

が成り立っている。ここで、

$$\sigma(x) = \frac{\partial S(R(x), W(x))}{\partial R} / \frac{\partial S(R(x), W(x))}{\partial W} \quad (15)$$

である。

3.2 ホモクリニック点の探索

この節では、いくつかのパラメータ値を特定した静学期待モデル (1次元モデル) に対し、計算機を援用して、ホモクリニック点およびホモクリニック分岐点を見出す。

まず次のようにパラメータを特定する。

$$(P) \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} (\Leftrightarrow \eta = 2), & \beta = 10 \\ a = -\frac{1}{2+\mu} \in (0, \frac{1}{2}), & A = \frac{1}{a} > 2. \end{cases}$$

このとき、各パラメータ値は、粗代替性のための条件も含め、その値に関する制約をみたしている⁽²⁾。また、上の設定のもとで、

$$\mu = \left[\frac{1-a}{a} \right]^2 \in (0, \infty)$$

に注意すると、 $\mu \in (0, \infty)$ は(13)に対して唯一の変なパラメータとみなせる。以後、パラメータ μ の依存を明示するとき g_μ あるいは $g(x; \mu)$ とかく。ここで、 g_μ は明示的に、

$$g(x; \mu) = \frac{R_\mu(x) W_\mu(x)}{R_\mu(x) + \mu}. \quad (16)$$

また、このパラメータの制約のもとでは、任意の $\mu \in (0, \infty)$ (および β) に対し、

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g(1) = 1$$

(2)ここでは β の値が大きめ、つまり、生産要素間の代替弾力性が小めに設定されているが、 β が1に比較的近いところでも、他のパラメータ値に依存して、以下で検討するような複雑性が確認できる。

が成り立つ。また,

$$g'(1) = \frac{(1+\beta)(1-\mu)}{2+\mu}$$

だから,

$$0 < \mu < \frac{3}{4} \left(= \frac{\beta-1}{\beta+2} \right)$$

ならば, $g'(1) > 1$, すなわち, 定常均衡点 $x=1$ が反発的であることがわかる。この不動点を以後 p_0 とかく⁽³⁾。したがって, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ より, $\mu \in (0, 3/4)$ に対し, g はある $\theta = \theta(\mu) > 1$ に対し極大 ($g'(\theta) = 0$) をもち, かつ, ある $\bar{x} = \bar{x}(\mu) > 1$ に対し $g(\bar{x}) = \bar{x}$ が成り立つ。 $\theta > 1$ が g に一意な極大を与えることをみるために, (15)における $\sigma(x)$ を調べる。ここで,

$$\sigma(x) = \frac{\mu W_\mu(x)}{R_\mu(R_\mu(x) + \mu)}$$

と計算できる。直ちに, $\sigma(0) = 0$ かつ $\sigma'(x) > 0$ ($x \in R_{++}$)。一意性を示すためには, $\sigma''(x) > 0$ ($x \in R_{++}$) を確かめればよい。実際の計算から, $1 - \mu - \mu^2 > 0$ ならば最後の不等式が成り立つ。したがって,

補題 1: パラメータ条件 (P) のもとで,

$$\mu \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}) =: I$$

に対し, $g_\mu(p_0) = p_0 = 1$ か $g'_\mu(p_0) > 1$ が成り立つ。しかも, g_μ は $\theta(\mu) > 1$ で一意な極大点をもつ。(図 3.2.1 をみよ)

次にある μ_0 に対し, $\theta(\mu_0) > 1$ が $g^2(\theta(\mu_0); \mu_0) = p_0$ となることを数値的に検証していく。そのために $g'(\theta; \mu) = 0$ かつ

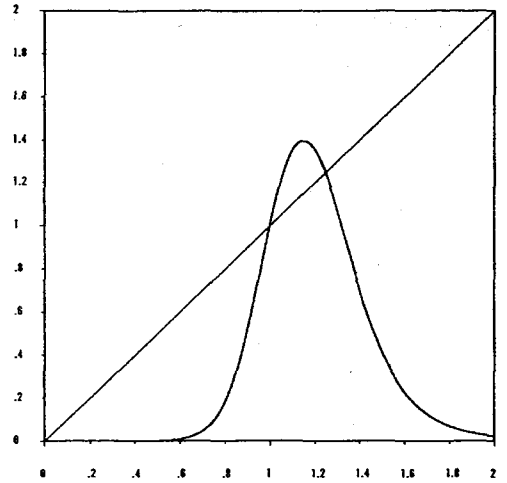


図 3.2.1 g_μ のグラフ $\mu = 0.2$

$g^2(\theta; \mu) = g(g(\theta; \mu); \mu) = 1$ の解を $\theta > 1$ かつ $\mu \in I$ の制約のもとで数値的に求める。実際, $\mu_1 = 0.212$ に対し, $g^2(\theta(\mu_1)) \approx 0.99969$, かつ, $\mu_2 = 0.213$ に対し, $g^2(\theta(\mu_2)) \approx 1.00106$ 。

補題 2: パラメータ条件 (P) のもとで, 区間 $I = (0.212, 0.213) \subset I$ に対し, ある $\mu_0 \in I$ が存在して, $g^2(\theta(\mu_0); \mu_0) = p_0$ 。ここで, $\mu_0 \approx 0.21225$, $\theta(\mu_0) \approx 1.10465$ 。

補題 2 における $\theta(\mu_0)$ が p_0 に対するホモクリニック軌道上にあること, すなわち, $g^{\pm n} \theta(\mu_0) \rightarrow p_0$ ($n \rightarrow \infty$) となることをみる。 $g^2(\theta(\lambda_0)) = p_0$ だから, 負の軌道が p_0 に収束することをみれば十分。しかし, これは不動点が区間 $(1, \theta)$ 上にないことが数値的に検証されるので満たされる。実際, $\{g_\mu\}_\mu$ が μ_0 でホモクリニック分岐を引き起こしていることは数値的に検証される:

補題 3: パラメータ条件 (P) のもとで, 補

(3) また, $m > 0$ のときは $p_m = (1, 1, \dots, 1) \in R^{m+1}$ とかくことにする。

題2の区間 I に対し、 $\{g_\mu; \mu \in I\}$ は $\mu = \mu_0$ で反発的不動点 p_0 に対するホモクリニック分岐を引き起こす。(図3.2.2をみよ)つまり、

・ $\theta(\mu_0)$ は g_{μ_0} の p_0 に対するホモクリニック軌道上にある。

$$\frac{\partial^2 g(\theta(\mu_0); \mu_0)}{\partial x^2} \approx -40.7 \neq 0 \quad (\text{2次接触})$$

$$\frac{dg(g(\theta(\mu_0); \mu_0); \mu_0)}{d\mu} \approx 1.981 \neq 0$$

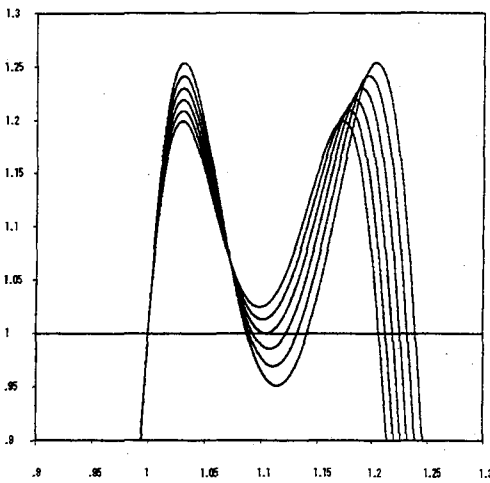


図3.2.2

ホモクリニック分岐： $\{g_\mu\}$ のグラフ
 $\mu=0.19 \sim 0.25$

4 高次元への拡張

4.1 主要結果

前章で、(10)で $m=0$ の場合、すなわち、静学的期待の場合における結果を利用して、 $M \neq 0$ の場合、すなわち、期待形成が過去の観察値に依存する場合の $F_\lambda: R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$ の振る舞いを調べる。ただし、期待形成過程は静学的期待形成に“近い”場合を考える。ここで、 $B_\varepsilon^*(x) := \{y \in R^m: |x-y| < \varepsilon\}$ であ

るとする。ここで、 $\lambda \in \Delta_m$ で表される期待形成過程が、静学的期待形成過程の ε の近さにあるとは、 $\lambda \in \Delta_m \cap B^{m+1}(\lambda_\varepsilon^*)$ となることである。 λ_ε^* から上のような十分小さな ε の近さにある $\lambda \in \Delta_m$ をとることは、現在の状況がそのまま将来も続くと想定する最も愚直な期待形成過程から過去をいくらか考慮するような“より洗練された”期待形成過程への更新であるとみなせる。次の命題1は、静学的期待形成のもとで、横断的ホモクリニック点を生み出す効用関数 $\lambda \in \Delta_m$ のなかで、たとえどれだけ過去を考慮に入れるように期待形成過程を更新しようとも、それもとの静学的期待形成過程に十分近いものである限り、その経済系は潜在的な複雑性から逃れられないことを意味する。

命題1 (馬蹄)：パラメータ条件 (P) のもとで、 m を任意の正の整数とする。補題における μ_0 に対し、 μ_0 に近い $\bar{\mu}$ で、 $g_{\bar{\mu}}^2(\theta(\bar{\mu})) < p_0$ となるものが取れ、それをひとつ固定する。そのとき、 $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\lambda \in \Delta_m \cap B^{m+1}(\lambda_\varepsilon^*)$ に対し、 $F_{\bar{\mu}, \lambda}$ は馬蹄をもつ。すなわち、カントル集合 $C_\lambda \subset R^{m+1}$ とある整数 $n \geq 1$ が存在して、 $F_{\bar{\mu}, \lambda}^n(C_\lambda) = C_\lambda$ 、かつ、 $F_{\bar{\mu}, \lambda}^n: C_\lambda \rightarrow C_\lambda$ は2記号上のシフト(bi-infinite full-shift on two symbols)と位相共役である。

証明： $m > 0$ をとる。補題1-3から、ある开区間 $J \subset I$ がとれて、任意の $\bar{\mu} \in J$ に対し、特異写像 $F_{\bar{\mu}, \lambda_\varepsilon^*}$ は p_m に対する横断的ホモクリニック軌道をもつ。十分小さな $\varepsilon > 0$ をとれば、任意の $\lambda \in \Delta_m \cap B^{m+1}(\lambda_\varepsilon^*)$ に対し、 $F_{\bar{\mu}, \lambda}: R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$ はその像の上への微分同相写像であり、かつ、 p_m は双曲型。 $C^r(r \geq 1)$ 級摂

動に対する横断的ホモクリニック点の安定性から、 $F_{\mu,\lambda}$ は p_m に対する横断的ホモクリニック点ともつ。よって、Smale-Birkhoffのホモクリニック点定理から結論が従う。 \square

注意： $g_\mu: R_+ \rightarrow R_+$ は上の命題の条件のもとで、馬蹄 $C \subset R_+$ をもつ。ただし、非可逆性から、ある n に対し、 $g_{\mu,\lambda}^n|_C$ は 2 記号上の片側全推移写像と位相共役である。

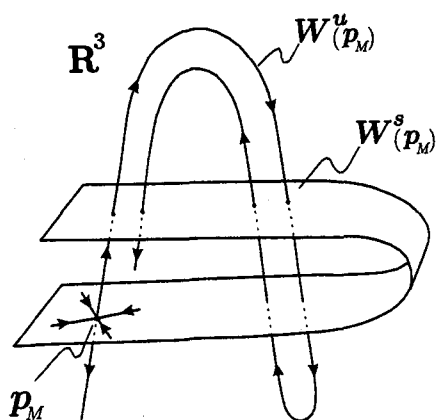


図 4.1.1

$m=2$ の場合の不動点 $p_m=(1,1,1)$ に対する 2 次元安定多様体 $W^s(p_m)$ と 1 次元不安定多様体 $W^u(p_m)$ の横断的交叉：概要図

よく議論されるように、馬蹄の存在自体は観測可能な複雑性を意味しない (たとえば、横尾 (1997a,b) をみよ)。実際、ゼロ均衡点 $0 \in R^{m+1}$ が局所漸近安定になっているので、馬蹄が存在するとしてもほとんどすべての初期条件から出発する軌道がゼロ均衡点に収束してしまうこともあろうが、上の命題はそれを排除していないことに注意する。

命題 1 とは異なり、以下の結果は観測可能性を含む。ただし、現段階では、結果は $m=1$ までに制限されているが、任意の $m>0$ について成り立つと予想される。ここで、コンパクトな不変集合 Λ が、稠密軌道をもち、かつ、その安定集合 $W^s(\Lambda)$ が非空の内部をもつときアトラクタ (attractor) であるという。また、アトラクタが正の Lyapunov 指数をもつ稠密軌道をもつとき、ストレンジ (strange) である⁽⁴⁾という。(別の世代重複モデルに対するストレンジ・アトラクタの発生に関して Yokoo(1997c) も参照せよ。)

命題 2 (ストレンジ・アトラクタ): パラメータ条件 (P) のもとで、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、 $\tilde{\lambda} \in \Delta_1 \cap B_\varepsilon^c(\lambda_1)$ を任意にとる。そのとき、 μ_0 の近くのパラメータ値のルベグ測度正集合 E が存在して任意の $\mu \in E$ に対し、 $F_{\mu,\tilde{\lambda}}$ はストレンジ・アトラクタをもつ (図 4.1.2 a,b)。

証明： $\lambda = \lambda_1$ のとき、補題 3 と Mora-Viana の定理 (Mora and Viana 1993, Theorem C) から結果が従う。 $\tilde{\lambda} \in \Delta_1 \cap B_\varepsilon^c(\lambda_1)$ のとき、 p_1 の安定および不安定多様体のコンパクト部分がパラメータ (μ, λ) に C^0 位相で連続的に依存するから (Palis and Takens, 1993, Appendix 4), μ_0 に近いある $\hat{\mu}$ に対し、 $\{F_{\mu,\tilde{\lambda}}\}_\mu$ は $\mu = \hat{\mu}$ でホモクリニック分岐を引き起こす。よって、Mora-Viana の定理 (Theorem A) から結論を得る。 \square

(4) アトラクタ、および、ストレンジ・アトラクタの定義は著者によりいくらかず異なる。ストレンジ・アトラクタの場合、いずれの定義も初期値鋭敏性 (sensitive dependence on initial conditions) に関連する概念が中心的な役割を果たす。数学的な取り扱いについては、Palis and Takens (1993) を参照せよ。

ストレンジ・アトラクタ以外にも、ホモクリニック分岐に伴い無限個の高い周期の周期

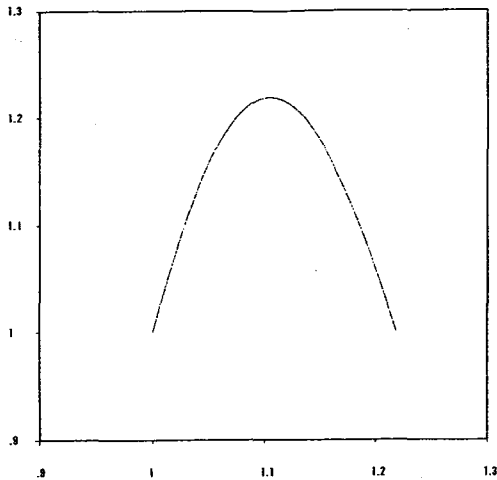


図 4.1.2.a

(x_1^0, x_1^1) —平面：ストレンジ・アトラクタ。

$\mu = \mu_0 \approx 0.21225$, $\lambda = (1, 0)$ 。

最大 Lyapunov 指数 $\ell \approx 0.679$

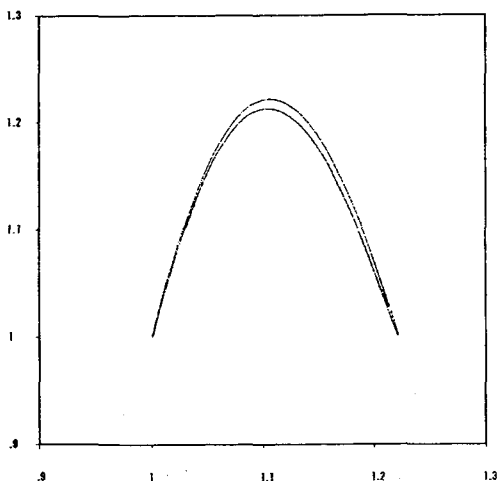


図 4.1.2.b

(x_1^0, x_1^1) —平面：ストレンジ・アトラクタ。

$\mu = 0.2150$, $\lambda = (0.98, 0.02)$ 。

最大 Lyapunov 指数 $\ell \approx 0.551$

アトラクタ（沈点）があるパラメータ値に対して生じることがわかる。

命題 3（無限沈点）：パラメータ条件 (P) のもとで、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、 $\tilde{\lambda} \in \Delta_1 \cap B_2^c(\lambda_1^*)$ を任意にとる。そのとき、 μ_0 の近くにある $\hat{\mu}$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対し、パラメータ値の区間 $K = [\hat{\mu} - \delta, \hat{\mu} + \delta]$ をとると、部分区間 $K' \subset K$ が存在し、その剰余部分集合 (residual subset) $B \subset K'$ の任意の $\mu \in B$ に対し、 $F_{\mu, \lambda}$ は加算無限個の沈点をもつ。

証明：命題 2 と同様の状況に対し、Newhouse の定理 (Newhouse 1979, Theorem 3) を適用する。□

命題 3 において、 $B \subset K'$ は K' 稠密だが、測度ゼロ集合であるかもしれないという意味で、経済現象としては観測可能性が保証されない。それとは対照的に、命題 2 においては生産および消費関数にかかるパラメータ値の集合 E の測度は正であった。ストレンジ・アトラクタ、すなわち、観測可能なカオスが経済系の族に対して測度論的に沢山あるという意味で「観測可能」であることを意味する。いいかえれば、静学的期待形成を行う個人が、補題 3 の状況で、複雑な変動を観測しているときに、たとえ一期前の観察値を考慮するように期待形成過程を変更したとしても、それが静学的期待形成に十分近いものである限り、複雑な変動が除去されない可能性が高いことが示されたことになる。

4.2 数値結果

以下では、上のモデルに基づくいくつかの

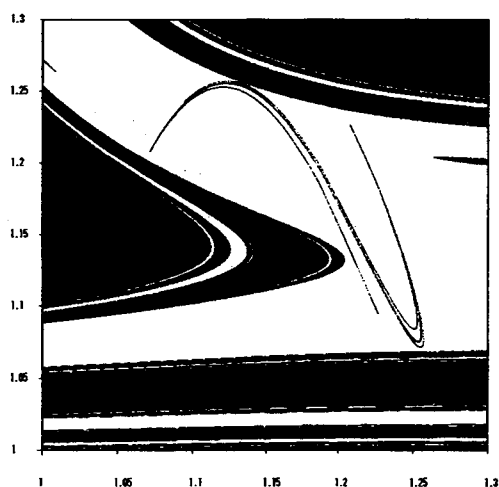


図 4.2.1.a

(x_t^0, x_t^1) —平面: $m=1$ の場合のアトラクタ吸引域の図 ($\mu=0.165, \lambda=(0.9, 0.1)$)。アトラクタ (中央) とその吸引域 (白い部分)。黒い部分はゼロ均衡 $O \in R^2$ の吸引域。

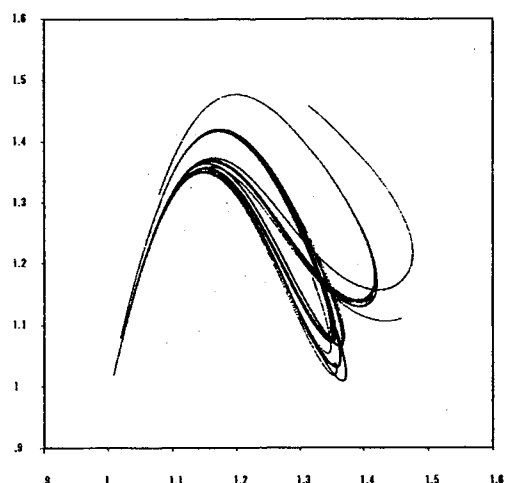


図 4.2.2.a

(x_t^0, x_t^1) —平面: 4次元空間内 ($m=3$) のアトラクタ。
 $\lambda = (0.80, 0.10, 0.07, 0.03), \mu=0.1$ 。

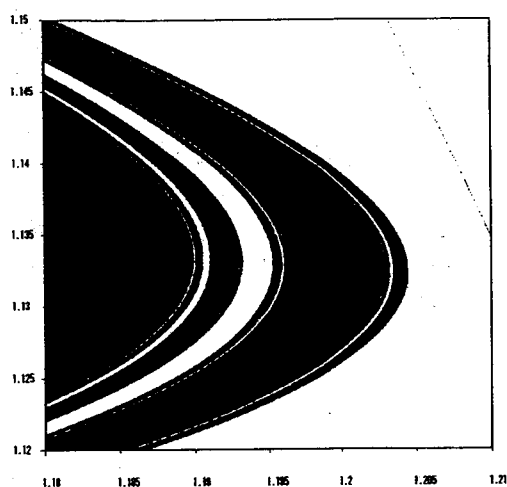


図 4.2.1.b

(x_t^0, x_t^1) —平面: $m=1$ の場合のアトラクタ吸引域の図 ($\mu=0.165, \lambda=(0.9, 0.1)$)。前図を拡大したもの。

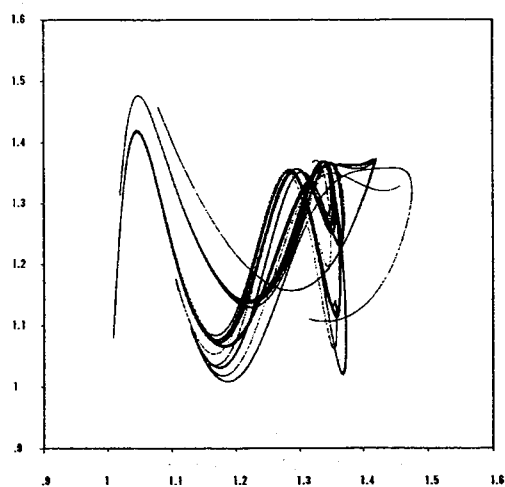


図 4.2.2.b

(x_t^0, x_t^1) —平面: 4次元空間内のアトラクタ。
 $\lambda = (0.80, 0.10, 0.07, 0.03), \mu=0.1$ 。

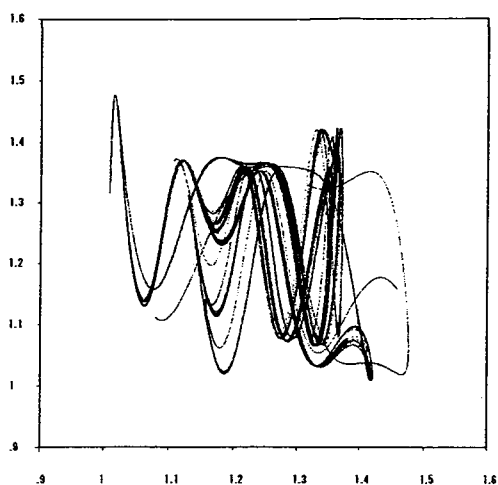


図 4.2.2.c

(x_t^0, x_t^3) —平面：4次元空間内のアトラクタ。
 $\lambda = (0.80, 0.10, 0.07, 0.03)$, $\mu = 0.1$ 。

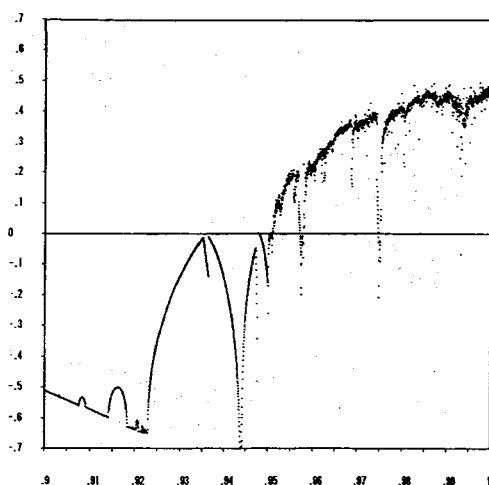


図 4.2.3.b

(λ_0, l) —平面：最大 Lyapunov 指数 l 。
 $m=1$, $\mu=0.23$ 。

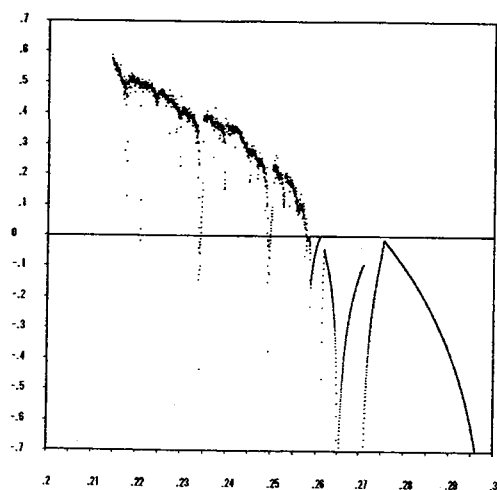


図 4.2.3.a

(μ, l) —平面：最大 Lyapunov 指数 l 。
 $m=1$, $\lambda_0=0.97$ 。

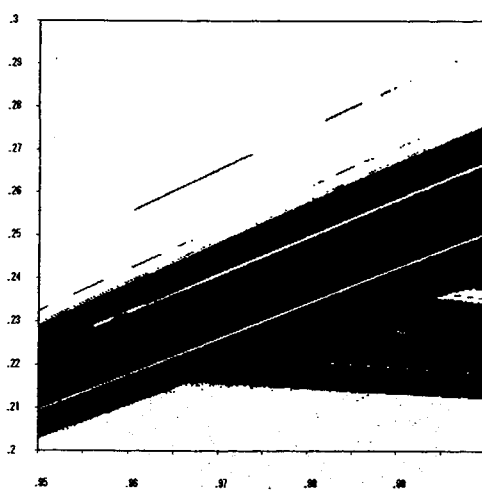


図 4.2.4

(λ_0, μ) —平面：最大 Lyapunov 指数 l の符号
 によるパラメータ空間の色分け。
 黒い部分が $l > 0$ となるアトラクタをもつ領
 域。白い部分がそれ以外。

数値結果を示す。図 4.2.1.a,b は 2 つのアトラクタ (ストレンジ・アトラクタと吸引的なゼロ均衡点) の境界が複雑に入り組む様子 (fractal basin boundary) を示している。また、期待形成が静学的期待形成からより遠い場合 ($m=3$, $\lambda=(0.80,0.10,0.07,0.03)$) の R^4 におけるアトラクタの様子が図 4.2.2 .a,b,c で観察される。図 4.2.3.a,b では最大 Lyapunov 指数が数値的に計算されている。図 4.2.4 では 2 つのパラメータ (λ_0, μ) の組みに対し、対応するアトラクタの最大 Lyapunov 指数が正か非正か (つまり、観測可能なカオスが発生しているか否か) によってパラメータ空間を色分けしている。この図は観測可能なカオスが極めて多く発生していることを数値的に示している。

5 結語

完全予見の仮定のもとでは単純な変動の型しか発生しない世代重複モデルに対し、適応的な期待形成を導入したときに複雑な変動が生じることが示された。特に正の最大 Lyapunov 指数で特徴づけられる観測可能なカオスすなわちストレンジ・アトラクタが我々のモデルにおいて高い頻度で発生すること、つまり、それがひとつの典型的現象であることが明らかになった。しかしながら、決定論的な枠組みにおける期待形成に関する経済主体の合理性を制限して完全予見の仮定を放棄したときに、それに代わる適応的な期待形成の定式化はおそらく無数に考えられる。ここで用いられた適応的な期待形成過程は、“計量経済学者”が行う予測 (cf. Sargent 1993, Hommes and Sorger 1997) よりもはるかに洗練されていないものであった。たしか

に、体系的に誤りを犯し続けるような経済主体の行動が仮定されたモデルから得られる結論はあまり信憑性があるものとはいえない。従来ここで用いたような期待形成過程は「体系的な誤り」を含むので経済主体の合理性とは適合しないとして直ちに退けられる嫌いがあったように思われる。しかし、Hommes and Sorger (1997) によって最近報告されたように、実際にカオス的な時系列を発生させる非線形の経済系と、その経済系から発生する時系列が従っていると経済主体が信じるより単純な、例えば、1 階の自己回帰過程とを当該の経済主体が観察された時系列から、ある利用可能な統計的な手法では識別できず、その意味で同一視してしまう場合、その“当たらない”期待形成過程を信じることは体系的な誤りではないとする主張がある。もし、そのような主張を受け入れることができた場合、ここで示唆されたストレンジ・アトラクタのような体系的な誤りとみなされがちであった期待形成過程から生じた複雑な変動形態の中に信憑性のあるものが見出せる可能性を単純に否定することは必ずしもできないであろう。

参考文献

- [1] Azariadis, C. (1993): *Intertemporal Macroeconomics*. Blackwell.
- [2] Brock, W. A. and Hommes, C. H. (1997): "A Rational Route to Randomness," *Econometrica*, forthcoming.
- [3] Diamond, P. A. (1965): "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 55, pp. 1126-1150.
- [4] Galor, O. and Ryder, H. E. (1989): "Existence, Uniqueness and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital." *Journal of Economic Theory* 49, pp. 360-375.
- [5] Hommes, C. and Sorger, G. (1997): "Consistent Expectations Equilibria," Department of Economics and Tinbergen Institute, University of Amsterdam.
- [6] Mora, L. and Viana, M. (1993): "Abundance of Strange Attractors," *Acta Math.* 171, pp. 1-71.

-
- [7] Newhouse, S.(1979): "The Abundance of Wild Hyperbolic Sets and Non-smooth Stable Sets for Diffeomorphisms," *Publ. Math. I.H.E.S.* 50. pp.101-151.
- [8] Palis, J. and Takens, F.(1993): *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Cambridge.
- [9] Sargent, T. J.(1993): *Bounded Rationality in Macroeconomics*. Clarendon Press.
- [10] de Vilder, R.(1996): "Complicated Endogenous Business Cycles under Gross Substitutability." *Journal of Economic Theory* 71, pp.416-442.
- [11] Yokoo, M.(1997a): "Chaotic Dynamics in a Two-dimensional Overlapping Generations Model," submitted for publication.
- [12] 横尾昌紀(1997b): 「景気循環モデルにおける複数アトラクタ」, 早稲田経済学研究 45. pp.43-54.
- [13] Yokoo, M. (1997c): "Strange Attractors in a Two-dimensional Overlapping Generations Model." *Proceedings of 1977 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications(Nolita '97), vol.1*, pp.501-503.

(博士後期課程第2年度生)